

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор
Федерального института
педагогических измерений



А.Г. Ершов
« 10 » ноября 2010 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФИПИ по математике,
член-корреспондент РАН и РАО

А.Л. Семенов
« 5 » ноября 2010 г.

Государственная (итоговая) аттестация 2011 года (в новой форме)
по МАТЕМАТИКЕ обучающихся, освоивших основные
общеобразовательные программы

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов для проведения
в 2011 году государственной (итоговой) аттестации
(в новой форме) по МАТЕМАТИКЕ обучающихся,
освоивших основные общеобразовательные программы
основного общего образования

подготовлен Федеральным государственным научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов для проведения
в 2011 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме)
по МАТЕМАТИКЕ обучающихся, освоивших основные
общеобразовательные программы основного общего образования

Пояснения к демонстрационному варианту экзаменационной работы

При ознакомлении с демонстрационным вариантом следует иметь в виду, что включённые в него задания не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2011 году. Разделы содержания, на которых базируются контрольно-измерительные материалы, определены в спецификации, полный перечень соответствующих элементов содержания и умений, которые могут контролироваться на экзамене 2011 года, приведён в кодификаторах, размещённых на сайте www.fipi.ru.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать возможность любому участнику экзамена и широкой общественности составить представление о структуре будущей экзаменационной работы, числе и форме заданий, а также их уровне сложности. Эти сведения дают возможность выработать стратегию подготовки к сдаче экзамена по математике.

Демонстрационный вариант 2011 года

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух частей. В первой части 18 заданий, во второй – 5. На выполнение всей работы отводится 4 часа (240 минут). Время выполнения первой части ограничено – на неё отводится 90 мин; по истечении этого времени ответы на задания первой части работы сдаются.

При выполнении заданий первой части нужно указывать только ответы, ход решения приводить не надо.

При этом:

- если к заданию приводятся варианты ответов (четыре ответа, из них правильный только один), то обведите кружком **номер** выбранного ответа;

- если ответы к заданию не приводятся, то впишите полученный ответ в отведённое для этого место;

- если требуется соотнести некоторые объекты (например, графики, обозначенные буквами А, Б, В, и формулы, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4), то впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Если вы ошиблись при выборе ответа, то зачеркните отмеченную цифру и обведите нужную:

~~1~~ 26 2) 20 **3** 15 4) 10

В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите новый:

Ответ: ~~$x = -12$~~ $x = 3$

Все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нём можно проводить нужные линии, отмечать точки, выполнять дополнительные построения.

Задания второй части выполняются на отдельном листе с записью хода решения. Текст задания можно не переписывать, необходимо лишь указать его номер.

Желаем успеха!

Часть 1

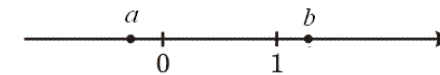
1 Площадь территории Испании составляет 506 тыс. км². Как эта величина записывается в стандартном виде?

- 1) $5,06 \cdot 10^2$ км²
- 2) $5,06 \cdot 10^3$ км²
- 3) $5,06 \cdot 10^4$ км²
- 4) $5,06 \cdot 10^5$ км²

2 Из 59 девятиклассников школы 22 человека приняли участие в городских спортивных соревнованиях. Сколько приблизительно процентов девятиклассников приняли участие в соревнованиях?

- 1) 0,37 %
- 2) 27 %
- 3) 37 %
- 4) 2,7 %

3 Числа a и b отмечены точками на координатной прямой. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и 1.



- 1) $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, 1
- 2) 1, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$
- 3) $\frac{1}{a}$, 1, $\frac{1}{b}$
- 4) $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$, 1

4 Найдите значение выражения $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 1$ при $x = 1$.

Ответ: _____

5 Из формулы периода обращения $T = \frac{t}{N}$ выразите время вращения t .

Ответ: _____

6 Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(x-4)(x-2)$?

- 1) $(x-4)(2-x)$
- 2) $-(x-4)(2-x)$
- 3) $(4-x)(x-2)$
- 4) $-(4-x)(2-x)$

7 Представьте выражение $6m + \frac{3-7m^2}{m}$ в виде дроби.

Ответ: _____

8 Какое из данных выражений **не равно** выражению $\frac{\sqrt{20}}{3}$?

- 1) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 2) $\frac{20}{3\sqrt{20}}$ 3) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$ 4) $\sqrt{\frac{20}{3}}$

9 Решите уравнение $x^2 + 7x - 18 = 0$.

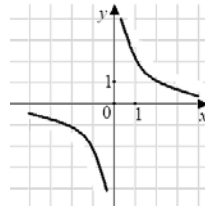
Ответ: _____

10 Гипербола, изображённая на рисунке, задаётся уравнением $y = \frac{2}{x}$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ

УТВЕРЖДЕНИЯ

- A) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = x + 1 \end{cases}$ 1) система имеет одно решение
- B) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 1 - x \end{cases}$ 2) система имеет два решения
- B) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -2 \end{cases}$ 3) система не имеет решений



Ответ:

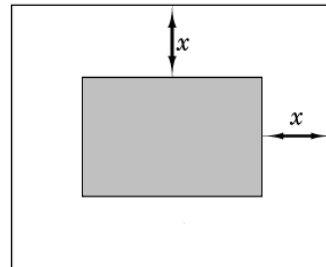
| | | |
|---|---|---|
| А | Б | В |
| | | |

11 Прочитайте задачу:

«Фотография имеет форму прямоугольника со сторонами 10 см и 15 см. Её наклеили на белую бумагу так, что вокруг фотографии получилась белая окантовка одинаковой ширины. Площадь, которую занимает фотография с окантовкой, равна 500 см^2 . Какова ширина окантовки?»

Пусть ширина окантовки равна x см. Какое уравнение соответствует условию задачи?

- 1) $(10 + 2x)(15 + 2x) = 500$
- 2) $(10 + x)(15 + x) = 500$
- 3) $10 \cdot 15 + (10x + 15x) \cdot 2 = 500$
- 4) $(10 + 2x)(15 + x) = 500$



12 Решите неравенство $20 - 3(x + 5) < 1 - 7x$.

Ответ: _____

13 При каких значениях x верно неравенство $x^2 + 2x - 3 < 0$?

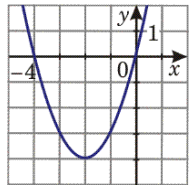
Ответ: _____

14 Из арифметических прогрессий, заданных формулой n -го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{25} < 0$.

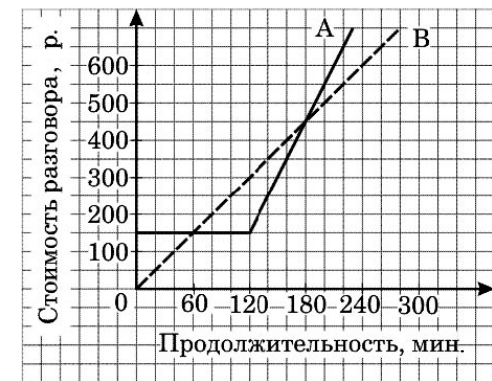
- 1) $a_n = 2n$ 3) $a_n = -2n + 100$
- 2) $a_n = -2n + 50$ 4) $a_n = 2n - 100$

15 График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке?

- 1) $y = x^2 + 4$
- 2) $y = x^2 + 4x$
- 3) $y = -x^2 - 4x$
- 4) $y = -x^2 - 4$



16 Компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф А и тариф В. Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически. На сколько минут хватит 550 р., если используется тариф В?



Ответ: _____ мин.

17 На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Ответ: _____

18 Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

Ответ: _____

Часть 2

При выполнении заданий 19–23 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

- 19** Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.
- 20** Решите неравенство $(\sqrt{19} - 4,5)(5 - 3x) > 0$.
- 21** В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии.
- 22** Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.
- 23** Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

Ответы к заданиям части I

| Номер задания | Правильный ответ |
|---------------|-------------------------------|
| 1 | 4 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 4 | $-\frac{5}{12}$ |
| 5 | $t = TN$ |
| 6 | 2 |
| 7 | $\frac{3 - m^2}{m}$ |
| 8 | 4 |
| 9 | $x_1 = 2, x_2 = -9$ |
| 10 | 231 |
| 11 | 1 |
| 12 | $x < -1$ |
| 13 | $-3 < x < 1$ или $(-3; 1)$ |
| 14 | 4 |
| 15 | 2 |
| 16 | На 220 мин. |
| 17 | 0,995 |
| 18 | На 10 |

Решения и критерии оценивания к заданиям части 2

19 Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

Ответ: -2; 2; 6.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения. Получим:
 $x^2(x-6) - 4(x-6) = 0$, $(x-6)(x^2-4) = 0$, $x-6=0$ или $x^2-4=0$. Значит,
уравнение имеет корни: -2; 2; 6.

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания |
|-------|--|
| 2 | Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ. |
| 1 | Ход решения правильный, многочлен в левой части уравнения разложен на множители, но при этом допущена ошибка в знаке, например, получен двучлен $x^2 + 4$, ответ дан с учетом этой ошибки. Или допущена описка на последнем шаге. |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям. |

20 Решите неравенство $(\sqrt{19} - 4,5)(5 - 3x) > 0$.

Ответ: $(1\frac{2}{3}; +\infty)$. Другая возможная форма ответа: $x > 1\frac{2}{3}$.

Решение. 1) Определим знак разности $\sqrt{19} - 4,5$. Так как $4,5 = \sqrt{20,25}$ и $\sqrt{20,25} > \sqrt{19}$, то $\sqrt{19} - 4,5 < 0$.

2) Получаем неравенство $5 - 3x < 0$. Отсюда $x > 1\frac{2}{3}$.

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания |
|-------|--|
| 3 | Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ. |
| 2 | Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении линейного неравенства допущена вычислительная ошибка или описка. |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям. |

- 21** В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии.

Ответ: 48, 60, 75.

Решение. 1) Пусть (b_n) – данная геометрическая прогрессия. Составим

$$\text{систему } \begin{cases} b_1 + b_1q = 108, \\ b_1q + b_1q^2 = 135. \end{cases} \quad \text{Далее: } \begin{cases} b_1(1+q) = 108, \\ b_1q(1+q) = 135, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q) = 108, \\ q \cdot 108 = 135. \end{cases}$$

Отсюда $q = \frac{5}{4}$, $b_1 = 48$.

2) $b_2 = 48 \cdot \frac{5}{4} = 60$, $b_3 = 60 \cdot \frac{5}{4} = 75$.

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания |
|-------|--|
| 3 | Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ. |
| 2 | Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка и ответ отличается от правильного. |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям. |

- 22** Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

Ответ: (2; -1).

Решение. 1) Найдём значения b , при которых система $\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение. Выполнив подстановку, получим уравнение $x^2 + (2x + b)^2 = 5$, т.е. $5x^2 + 4xb + b^2 - 5 = 0$.

2) Полученное уравнение имеет единственное решение, когда его дискриминант равен нулю. Имеем: $D_1 = 4b^2 - 5(b^2 - 5) = 25 - b^2$. Решив уравнение $25 - b^2 = 0$, получим $b = \pm 5$.

3) Таким образом, получили уравнения двух прямых, касающихся окружности: $y = 2x + 5$ и $y = 2x - 5$.

Найдём абсциссы точек касания, подставив найденные значения b в уравнение $5x^2 + 4xb + b^2 - 5 = 0$:

при $b = 5$ получим уравнение $x^2 + 4x + 4 = 0$, откуда $x = -2$; этот корень не удовлетворяет условию задачи;

при $b = -5$ получим уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$, откуда $x = 2$.

Найдём соответствующее значение y : $y = 2x - 5 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$. Координаты точки касания (2; -1).

Замечания. 1) В первом шаге решения учащийся может опустить запись системы, подставив сразу $y = 2x + b$ в уравнение окружности.

2) В третьем шаге учащийся может сначала выбрать касательную, удовлетворяющую условию задачи, а затем искать координаты точки касания; выбрать касательную учащийся может из графических соображений.

3) Решение задачи может быть геометрическим.

| Баллы | Критерии оценки выполнения задания |
|-------|---|
| 4 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ. |
| 3 | Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена вычислительная ошибка или описка; или при верных вычислениях в ответе указаны координаты обеих точек касания. |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям. |

Комментарий. Ошибки в составлении выражения D_1 (или D), в применении формулы квадрата двучлена считаются существенными, и решение при их наличии не засчитывается.

- 23** Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

Ответ: плот пройдет $\frac{2}{5}$ всего пути.

Решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению – в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер – в 3 раза больше, т.е. $3S$ км. После встречи катер

пройдет $3S$ км, а плот – в 5 раз меньше, т.е. $\frac{3S}{5}$ км. Всего плот пройдет

$S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно

$$\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}.$$

Другое возможное решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Скорость сближения катера и плота равна $x + 3x = 4x$ км/ч. Встреча произошла через $\frac{AB}{4x}$ ч. За это время плот проплыл

$x \cdot \frac{AB}{4x} = \frac{AB}{4}$ км, а катер – $\frac{3AB}{4}$ км. Обратный путь катер пройдет за

$\frac{3AB}{4}$ ч. Плот за это время проплывет расстояние, равное $\frac{4}{5x} = \frac{3AB}{20x}$ ч. Плот за это время проплывет расстояние, равное

$x \cdot \frac{3AB}{20x} = \frac{3AB}{20}$ км, а всего он проплывет $\frac{AB}{4} + \frac{3AB}{20} = \frac{2}{5}AB$ км.

| Баллы | Критерии оценивания выполнения задания |
|-------|---|
| 4 | Ход решения верный, все его шаги выполнены, получен верный ответ. |
| 3 | Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка – в преобразованиях или в вычислениях, с её учетом дальнейшие шаги выполнены правильно. |
| 0 | Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям. |