Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2011/2012 учебного года для 11 класса

Вариант 1

1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{13} = 0$, а произведение чисел $5^{a_1}, 5^{a_2}, \ldots, 5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $\left|\arccos\sin 6 - \dfrac{\pi x}{2}\right| = 6$.

3. В группу из 17 детей присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 4 пряника и 9 конфет, а второго — 3 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x| + 3)(|y| + 3) \leqslant 25$.

5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

6. Найдите область значений функции
$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(27 - 3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27 - 3x}}.$$

7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 25 и площадью основания 60 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 2 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 15 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 1000 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 38 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

9 марта 2012 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2011/2012 учебного года для 11 класса

Вариант 1

1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{13} = 0$, а произведение чисел $5^{a_1}, 5^{a_2}, \ldots, 5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $\left|\arccos\sin 6 - \dfrac{\pi x}{2}\right| = 6$.

3. В группу из 17 детей присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 4 пряника и 9 конфет, а второго — 3 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x| + 3)(|y| + 3) \leqslant 25$.

5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

6. Найдите область значений функции
$$f(x) = \log_2 x \cdot \log_2 \frac{64}{x} \cdot \sqrt{\log_3(27 - 3x) \cdot \log_3 \frac{9}{27 - 3x}}.$$

7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 25 и площадью основания 60 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 2 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 15 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 1000 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 38 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

9 марта 2012 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2011/2012 учебного года для 11 класса

Вариант 2

1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{14} = 0$, а произведение чисел $2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_{26}}$ равно их среднему арифметическому.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $\left|\arcsin\cos 5 - \dfrac{\pi x}{2}\right| = 5$.

3. В группу, состоящую из 19 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 5 пряников и 9 конфет, а второго — 4 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x| + 4)(|y| + 4) \leqslant 49$.

5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка AO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол A, если $OD = 3BC$.

6. Найдите область значений функции
$$f(x) = \log_3 x \cdot \log_3 \frac{81}{x} \cdot \sqrt{\log_2(20 - 2x) \cdot \log_2 \frac{4}{20 - 2x}}.$$

7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 30 и площадью основания 50 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 3 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 20 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 900 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 32 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

9 марта 2012 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2011/2012 учебного года для 11 класса

Вариант 2

1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{14} = 0$, а произведение чисел $2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_{26}}$ равно их среднему арифметическому.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $\left|\arcsin\cos 5 - \dfrac{\pi x}{2}\right| = 5$.

3. В группу, состоящую из 19 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 5 пряников и 9 конфет, а второго — 4 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x| + 4)(|y| + 4) \leqslant 49$.

5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка AO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол A, если $OD = 3BC$.

6. Найдите область значений функции
$$f(x) = \log_3 x \cdot \log_3 \frac{81}{x} \cdot \sqrt{\log_2(20 - 2x) \cdot \log_2 \frac{4}{20 - 2x}}.$$

7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 30 и площадью основания 50 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 3 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 20 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 900 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 32 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

9 марта 2012 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2011/2012 учебного года для 11 класса

Вариант 3

1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{15} = 0$, а произведение чисел $3^{a_1}, 3^{a_2}, \ldots, 3^{a_{28}}$ равно их среднему арифметическому.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $\left|\arcsin\cos 4 - \dfrac{\pi x}{2}\right| = 4$.

3. В группу, состоящую из 13 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 3 пряника и 10 конфет, а второго — 2 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x|+2)(|y|+2) \leqslant 36$.

5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка CO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол C, если $OD = 5AB$.

6. Найдите область значений функции
$$f(x) = \log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x} \cdot \sqrt{\log_2(24-4x) \cdot \log_2 \frac{16}{24-4x}}.$$

7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 35 и площадью основания 40 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 4 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 25 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 800 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 48 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

9 марта 2012 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задания заключительного этапа 2011/2012 учебного года для 11 класса

Вариант 3

1. Найдите первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если $a_{15} = 0$, а произведение чисел $3^{a_1}, 3^{a_2}, \ldots, 3^{a_{28}}$ равно их среднему арифметическому.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения $\left|\arcsin\cos 4 - \dfrac{\pi x}{2}\right| = 4$.

3. В группу, состоящую из 13 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 3 пряника и 10 конфет, а второго — 2 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

4. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leqslant a$ следует неравенство $(|x|+2)(|y|+2) \leqslant 36$.

5. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка CO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол C, если $OD = 5AB$.

6. Найдите область значений функции
$$f(x) = \log_5 x \cdot \log_5 \frac{25}{x} \cdot \sqrt{\log_2(24-4x) \cdot \log_2 \frac{16}{24-4x}}.$$

7. По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 35 и площадью основания 40 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 4 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 25 и 10, остается нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объем верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

8. В течение дня выставку посетили по одному разу ровно 800 человек, причём в любой момент на ней находилось менее 48 посетителей. Какое наибольшее количество человек, не встречавшихся (попарно) на выставке друг с другом, можно при этом гарантированно выбрать из всех посетителей?

9 марта 2012 г.