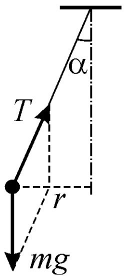
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Олимпиада «Ломоносов 2012 – 2013» по физике

Решения задач заключительного этапа

Вариант № 1

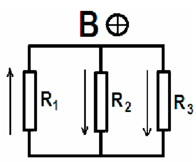
1.4.1. Пусть нить, на которой подвешен шар, образует с вертикалью угол α (см. рисунок). По второму закону Ньютона имеем: $m\omega^2 r = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$, где m – масса шара, $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость движения шара по окружности, $r = L\sin\alpha$ – радиус этой окружности, T – натяжение нити, g – модуль ускорения свободного падения. Из этих уравнений находим, что $\cos\alpha = \dfrac{g}{(2\pi n)^2 L}$. Потенциальная энергия шара относительно его нижнего положения $E_{\text{п}} = mgL(1-\cos\alpha)$. Кинетическая энергия шара $E_{\text{к}} = \dfrac{m(\omega r)^2}{2} = \dfrac{m}{2}(2\pi nL\sin\alpha)^2$. Полная механическая энергия шара $E(n) = E_{\text{п}}(n) + E_{\text{к}}(n)$.



Искомая работа $A = E(n) - E(n/2)$. С учётом уменьшения угла отклонения нити от вертикали находим, что $A = \dfrac{3}{2}m\left((\pi nL)^2 + \dfrac{3g^2}{4(\pi n)^2}\right) \approx 26$ Дж. **Ответ:** $A = \dfrac{3}{2}m\left((\pi nL)^2 + \dfrac{3g^2}{4(\pi n)^2}\right) \approx 26$ Дж.

2.9.1. При первом сжатии давление смеси сухого воздуха и водяного пара в сосуде возросло менее чем в пять раз, поэтому пар стал насыщенным и частично сконденсировался. При дальнейшем сжатии давление пара $p_{\text{н}}$ уже не менялось. Пренебрежем объемом сконденсировавшейся воды. Парциальное давление сухого воздуха при первом сжатии возросло в 5 раз, а при втором – еще в 3 раза. Полное давление влажного воздуха до начала сжатия равнялось $p_{\text{п}} + p_{\text{в}}$, где $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{в}}$ – парциальные давления пара и сухого воздуха соответственно. По условию задачи получаем: $p_{\text{н}} + 5p_{\text{в}} = 3(p_{\text{п}} + p_{\text{в}})$, $p_{\text{н}} + 15p_{\text{в}} = 7(p_{\text{п}} + p_{\text{в}})$. Отсюда $3p_{\text{н}} = 5p_{\text{п}}$. Следовательно, первоначальная влажность равна $\varphi = \dfrac{p_{\text{п}}}{p_{\text{н}}}\cdot 100\% = 60\%$. **Ответ:** $\varphi = \dfrac{p_{\text{п}}}{p_{\text{н}}}\cdot 100\% = 60\%$.

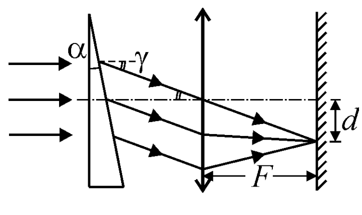
3.3.1. Пусть магнитная индукция B направлена так, как показано рисунке. Согласно правилу Ленца, возникающие при выключении магнитного поля ЭДС индукции, вызывают в каждом из малых контуров индукционные токи, текущие по часовой стрелке. Обозначим направления токов через резисторы стрелками на рисунке. По правилам Кирхгофа имеем: $\mathcal{E} = I_1R_1 + I_2R_2$; $\mathcal{E} = I_3R_3 - I_2R_2$; $I_1 = I_2 + I_3$. Учитывая, что величина ЭДС индукции в каждом малом контуре равна $\mathcal{E} = \alpha S$, получаем,



что $I_2 = \dfrac{\alpha S(R_3 - R_1)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$. По закону Джоуля–Ленца $Q_2 = I_2^2R_2t_0$, где $t_0 = \dfrac{B_0}{\alpha}$.

Ответ: $Q_2 = \alpha B_0R_2\left[\dfrac{S(R_3 - R_1)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\right]^2 = 0{,}5$ мДж.

4.5.1. По закону преломления для луча, выходящего из призмы, имеем $n\sin\alpha = \sin\beta$, где β – угол преломления. Поскольку углы α и β малые, то $n\alpha \approx \beta$. Поэтому угол отклонения падающего на призму луча от первоначального направления $\gamma = \beta - \alpha = (n-1)\alpha$. Угол между главной оптической осью линзы и побочной осью, параллельной падающим на

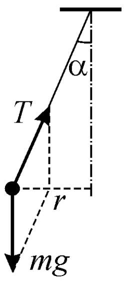


линзу лучам, также равен γ. Отсюда $d = F \cdot \mathrm{tg}\,\gamma \approx F\gamma = F(n-1)\alpha$. Следовательно, $n = 1 + \dfrac{d}{F\alpha}$ =1,5.

Ответ: $n = 1 + \dfrac{d}{F\alpha}$ =1,5.

Вариант № 2

1.4.2. Пусть нить, на которой подвешено тело, образует с вертикалью угол α (см. рисунок). По второму закону Ньютона имеем: $m\omega^2 r = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$, где m – масса тела, $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость движения тела по окружности, $r = L\sin\alpha$ – радиус этой окружности, T – натяжение нити, g – модуль ускорения свободного падения. Из этих уравнений находим, что $\cos\alpha = \dfrac{g}{(2\pi n)^2 L}$. Потенциальная энергия тела относительно его нижнего положения $E_{\text{п}} = mgL(1-\cos\alpha)$. Кинетическая энергия тела $E_{\text{к}} = \dfrac{m(\omega r)^2}{2} = \dfrac{m}{2}(2\pi n L\sin\alpha)^2$. Полная механическая энергия тела $E(n) = E_{\text{п}}(n) + E_{\text{к}}(n)$.

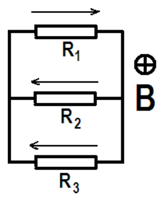


Работа силы сопротивления воздуха $A = W(n) - W(n/k) = \left[2m\cdot\left(\dfrac{\pi n L}{k}\right)^2 + \dfrac{3m}{2}\cdot\left(\dfrac{g}{2\pi n}\right)^2\right](k^2-1)$.

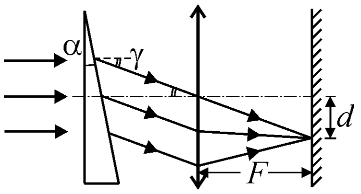
Подставляя числовые данные, последнее соотношение можно привести к виду $k^4 - 2{,}648k^2 - 5{,}196 = 0$. Отсюда $k \approx 2$. **Ответ:** $k \approx 2$.

2.9.2. При первом сжатии давление смеси сухого воздуха и водяного пара в сосуде возросло менее чем в пять раз, поэтому пар стал насыщенным и частично сконденсировался. При дальнейшем сжатии давление пара $p_{\text{н}}$ уже не менялось. Парциальное давление сухого воздуха при первом сжатии возросло в 5 раз, а при втором - еще в 3 раза. Полное давление влажного воздуха до начала сжатия равнялось $p_{\text{п}} + p_{\text{в}}$, где $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{в}}$ – парциальные давления пара и сухого воздуха соответственно. По условию задачи имеем: $p_{\text{н}} + 5p_{\text{в}} = 3(p_{\text{п}} + p_{\text{в}})$, $p_{\text{н}} + 15p_{\text{в}} = 7(p_{\text{п}} + p_{\text{в}})$. Отсюда $3p_{\text{н}} = 5p_{\text{п}}$. Масса водяного пара до сжатия $m = \dfrac{p_{\text{п}}V\mu}{RT}$, после сжатия $m_{\text{к}} = \dfrac{p_{\text{н}}V\mu}{15RT}$. Следовательно, $\alpha = \dfrac{m - m_{\text{к}}}{m} = 1 - \dfrac{p_{н}}{15p_{\text{п}}} = \dfrac{8}{9}$. **Ответ:** $\alpha = \dfrac{8}{9}$.

3.3.2. Пусть магнитная индукция B направлена так, как показано на рисунке. Согласно правилу Ленца, возникающие при выключении магнитного поля ЭДС индукции, вызывают в каждом из малых контуров индукционные токи, текущие по часовой стрелке. Обозначим направления токов через резисторы стрелками на рисунке. По правилам Кирхгофа имеем: $\mathcal{E} = I_1R_1 + I_2R_2$; $\mathcal{E} = I_3R_3 - I_2R_2$; $I_1 = I_2 + I_3$. Учитывая, что величина ЭДС индукции в каждом малом контуре равна $\mathcal{E} = \alpha S$, получаем, что $I_2 = \dfrac{\alpha S(R_3 - R_1)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$. По закону Джоуля–Ленца $Q_2 = I_2^2R_2t_0$, где $t_0 = \dfrac{B_0}{\alpha}$. Отсюда $B_0 = \dfrac{Q_2(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2}{\alpha R_2(R_3 - R_1)^2 S^2}$. **Ответ:** $B_0 = \dfrac{Q_2(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)^2}{\alpha R_2(R_3 - R_1)^2 S^2}$ = 0,8 Тл.



4.5.2. По закону преломления для луча, выходящего из призмы, имеем $n\sin\alpha = \sin\beta$, где β – угол

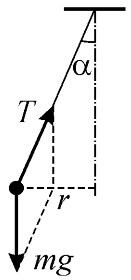


преломления. Поскольку углы α и β малые, то $n\alpha \approx \beta$. Поэтому угол отклонения падающего на призму луча от первоначального направления $\gamma = \beta - \alpha = (n-1)\alpha$. Угол между главной оптической осью линзы и побочной осью, параллельной падающим на линзу лучам, также равен γ. Отсюда $d = F \cdot \mathrm{tg}\,\gamma \approx F\gamma = F(n-1)\alpha$.

Ответ: $d \approx F(n-1)\alpha = 0{,}5$ см.

Вариант № 3

1.4.3. Пусть нить, на которой подвешен шар, образует с вертикалью угол α (см. рисунок). По второму закону Ньютона имеем: $m\omega^2 r = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$, где m – масса шара, $\omega = 2\pi n$ –

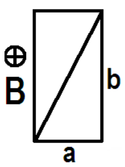


угловая скорость движения шара по окружности, $r = L\sin\alpha$ – радиус этой окружности, T – натяжение нити, g – модуль ускорения свободного падения. Из этих уравнений находим, что $\cos\alpha = \dfrac{g}{(2\pi n)^2 L}$. Потенциальная энергия шара относительно его нижнего положения $E_{п} = mgL(1-\cos\alpha)$. Кинетическая энергия шара $E_{к} = \dfrac{m(\omega r)^2}{2} = \dfrac{m}{2}(2\pi n L\sin\alpha)^2$. Так как $\Delta E_{п} = E_{п}(n) - E_{п}(n/2) = \dfrac{3mg^2}{4(\pi n)^2}$, а $\Delta E_{к} = E_{к}(n) - E_{к}(n/2) = \dfrac{3}{2}m\left((\pi n L)^2 + \dfrac{g^2}{(2\pi n)^2}\right)$, то искомое отношение $\dfrac{\Delta E_{к}}{\Delta E_{п}} = 2\left(\dfrac{\pi^2 n^2 L}{g}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \approx 2{,}5$.

Ответ: $\dfrac{\Delta E_{к}}{\Delta E_{п}} = 2\left(\dfrac{\pi^2 n^2 L}{g}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \approx 2{,}5$.

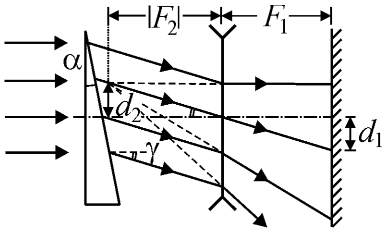
2.9.3. При сжатии давление смеси сухого воздуха и водяного пара в сосуде возросло менее чем в пять раз, поэтому пар стал насыщенным и частично сконденсировался. Его давление стало равным давлению насыщенного пара $p_{н}$. Парциальное давление сухого воздуха при сжатии возросло в 5 раз. Полное давление влажного воздуха до начала сжатия равнялось $p_{п} + p_{в}$, где $p_{п}$ и $p_{в}$ – парциальные давления пара и сухого воздуха соответственно. По условию задачи имеем: $p_{н} + 5p_{в} = 3(p_{п} + p_{в})$. Отсюда $\dfrac{p_{н}}{p_{п}} + 2\dfrac{p_{в}}{p_{п}} = 3$. Поскольку $\varphi = \dfrac{P_{п}}{P_{н}} \cdot 100\%$, получаем, что $\dfrac{100\%}{\varphi} + 2\beta = 3$. Отсюда следует, что $\beta = \dfrac{2}{3}$. **Ответ:** $\beta = \dfrac{2}{3}$.

3.3.3. Пусть магнитная индукция B направлена так, как показано на рисунке. Согласно правилу Ленца, возникающие при выключении магнитного поля ЭДС индукции, вызывают в каждом из



малых контуров индукционные токи, текущие по часовой стрелке. В силу симметрии сила тока протекающего по диагонали прямоугольника равна нулю, поэтому ток потечет только по периметру контура. Величина ЭДС индукции в контуре $\mathscr{E} = \alpha S = \alpha ab$, а сила тока, текущего по периметру контура, $I = \dfrac{\alpha ab}{2r(a+b)}$. По закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделившееся за время выключения поля, $Q = I^2 R t_0$, где $t_0 = \dfrac{B_0}{\alpha}$. Таким образом, $Q = \alpha B_0 \dfrac{(ab)^2}{2r(a+b)}$. **Ответ:** $\alpha = \dfrac{2Qr(a+b)}{B_0 (ab)^2}$ = 1 Тл/с.

4.5.3. По закону преломления для луча, выходящего из призмы, имеем $n\sin\alpha = \sin\beta$, где β – угол преломления. Поскольку углы α и β малые, то $n\alpha \approx \beta$. Поэтому угол отклонения падающего на призму луча от первоначального направления $\gamma = \beta - \alpha = (n-1)\alpha$. Угол между главной оптической осью линзы и побочной осью, параллельной падающим на линзу лучам, также равен γ. Отсюда $d_1 = F_1 \cdot \mathrm{tg}\,\gamma \approx F_1\gamma = F_1(n-1)\alpha$, где $F_1 = \dfrac{1}{D_1}$ – фокусное расстояние собирающей линзы. Если заменить собирающую линзу на рассеивающую (см. рисунок), то мнимое изображение пучка будет располагаться на расстоянии $d_2 \approx |F_2|\gamma = |F_2|(n-1)\alpha$ от главной оптической оси, где $F_2 = \dfrac{1}{D_2}$.



Искомое смещение изображения пучка по вертикали равно $\Delta y = (F_1 + |F_2|)(n-1)\alpha$.

Ответ: $\Delta y = \left(\dfrac{1}{D_1} + \dfrac{1}{|D_2|}\right)(n-1)\alpha = 1$ см.