Олимпиада школьников Ломоносов–2013 по робототехнике

Задачи

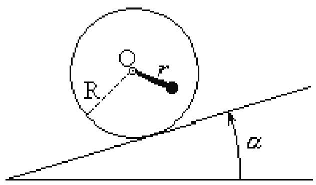
1.(7-9) Родители Роберта подарили сыну на день рождения мобильный робот с автономным энергетическим питанием, который затрачивал 10 г сухого спирта на 1 час непрерывной работы. Мальчик, изучив устройство робота, усовершенствовал его работу и провел испытание. В результате обнаружилось, что робот, проработав 40 минут, затратил на 20% меньше сухого спирта, чем по заводским данным. Сколько граммов спирта вмещает энергетический отсек робота, если после модификации он может непрерывно работать $3,5$ часа?

2.(7-11) Поверхность пола складского помещения разделена на черные и белые квадраты (8x8) так же, как на шахматной доске (поля **a1**, **c1**, **e1**, **g1**, **b2** и так далее — черные; поля **b1**, **d1**, **f1**, **h1**, **a2** и так далее — белые). Роботы трех видов («ладья», «слон» и «конь») ввозят на склад грузы через белый квадрат **h1**. Робот «ладья» перемещается по складу точно так же, как ходит шахматная ладья (по горизонталям и вертикалям), причем, на перемещение с грузом на один квадрат затрачивается 65 Дж. Робот «слон» перемещается по складу точно так же, как ходит шахматный слон (по диагоналям), причем, на перемещение с грузом на один квадрат затрачивается 84 Дж. Робот «конь» перемещается по складу прыжками (преодолевая препятствия) точно так же, как ходит шахматный конь (буквой Г), причем, на один прыжок затрачивается 150 Дж. Известно, что квадраты **c4**, **d5**, **e6** и **a6** уже заняты грузами.

А) На каком роботе выгоднее переместить груз по складу до белого квадрата **a8**?

Б) Для каждого белого квадрата укажите робота, на котором выгоднее доставлять грузы в этот квадрат из квадрата **h1**.

3.(10-11) Рассмотрим расположенный на наклонной плоскости с углом наклона α круговой однородный цилиндр, масса которого M, а радиус R. На оси цилиндра шарнирно закреплен маятник с массой m. Центр масс маятника расположен на расстоянии r от его оси O. Маятник можно поворачивать внутри цилиндра вокруг оси O с помощью двигателя, установленного на этой же оси.



А) Как расположить маятник внутри цилиндра, чтобы вся система находилась в равновесии на этой наклонной плоскости?

Б) Найти максимальное значение угла α, при котором возможно такое равновесие.

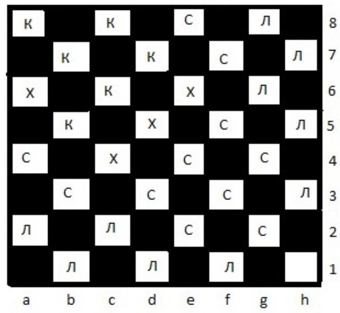
В) Какова должна быть ориентация маятника (в абсолютном пространстве), чтобы цилиндр катился вверх по наклонной плоскости? И при каких значениях угла α такое движение вверх по наклонной плоскости возможно?

23 марта 2013 года *г. Москва*

Решение

1. Масса m топлива пропорциональна времени t работы робота $m = \alpha t$. До модернизации $10 = \alpha \cdot t$ После модернизации коэффициент пропорциональности стал равен $0,8\alpha$. Тогда ответ $x = \dfrac{4}{5} \cdot 10 \cdot \dfrac{7}{2} = 28$ г.

2. А) Конь допрыгает до $a8$ за 6 ходов ($150 \cdot 6 = 900$), слон за 11 ($84 \cdot 11 = 924$), а ладья за 14 ($65 \cdot 14 = 910$). Конь — дешевле.



Б) Перебор вариантов с учетом симметрии.

3. На рисунке показано сечение системы "цилиндр + маятник"вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра и проходящей через его середину. Будем считать, что маятник лежит в этой плоскости. В сечении, вместо цилиндра, получается круг. Напомним, что M — масса цилиндра, R — его радиус (радиус круга), m — масса маятника, r — расстояние от оси цилиндра (от точки O) до центра масс маятника. Цилиндр считается однородным, тем самым его центр масс лежит на его оси (на рисунке — в центре круга O). Найдчм расстояние r_c от точки O (от оси цилиндра) до центра масс C всей системы (цилиндр + маятник), воспользовавшись соотношением

$Mr_c = m(r - r_c)$. (1)

Из выражения (1) получаем

$r_c = \frac{mr}{M+m}$. (2)

Пусть маятник отклонен от вертикали на угол ϕ. Тогда расстояние от центра масс C до вертикали, опущенной из точки O, равно

$r_c \sin\phi$. (3)

Расстояние от точки P контакта круга с наклонной прямой до вертикали, опущенной из точки O, равно

$R \sin\alpha$. (4)

Тогда расстояние от центра масс C до вертикали, проходящей через точку контакта P, равно разности величин (3) и (4)

$r_c \sin\phi - R\sin\alpha$. (5)

Момент силы тяжести всей системы относительно точки контакта P равен

$(M+m)(r_c \sin\phi - R\sin\alpha) = (M+m)\left(\frac{mr}{M+m}\sin\phi - R\sin\alpha\right) = mr\sin\phi - (M+m)r\sin\alpha$. (6)

Система будет находиться в равновесии, когда момент (6) будет равен нулю. Момент (6) равен нулю, когда плечо

$r_c \sin\phi - R\sin\alpha = 0$. (7)

Равенство (7) означает, что вертикаль, опущенная из центра масс всей системы C, проходит через точку контакта P. Воспользовавшись выражением (6), можно записать это условие в виде

$\sin\alpha = \frac{mr}{(M+m)R}\sin\phi$. (8)

При условии

$\sin\alpha < \frac{mr}{(M+m)R}\sin\phi$ (9)

момент силы тяжести относительно точки P направлен по часовой стрелке, и цилиндр может катиться вверх по наклонной поверхности. Максимальное значение величины $\sin\phi$ достигается при $\phi = frac\pi 2$, т.е. когда маятник ориентирован горизонтально. Таким образом, максимальное значение угла наклона опорной поверхности, при котором возможно равновесие цилиндра с маятником, определяется равенством

$\sin\alpha = \frac{mr}{(M+m)R}$. (10)

Равенство (10) означает, что угол наклона опорной поверхности таков, что вертикаль, опущенная из центра масс C всей системы (при горизонтально ориентированном маятнике), проходит через точку касания P. Если угол наклона таков, что

$\sin\alpha < \frac{mr}{(M+m)R}$, (11)

то цилиндр может катиться вверх по наклонной поверхности. Равенство (11) означает, что вертикаль, опущенная из центра масс C всей системы (при горизонтально ориентированном маятнике), пересекает опорную прямую выше точки касания P. Итак, для того, чтобы цилиндр мог катиться вверх по наклонной поверхности, необходимым и достаточным является условие (9), а при горизонтально ориентированном маятнике — условие (11).